

Title	臨界振幅比 R_x の $1/n$ 展開による $O(1/n^2)$ の計算(東京大学教養学部 相関理化学専門課程,1978年度 修士論文)
Author(s)	奥, 通敬
Citation	物性研究 (1979), 32(1): 59-62
Issue Date	1979-04-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/89774
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

臨界振幅比 R_x の $1/n$ 展開による $O(1/n^2)$ の計算

奥 通 敬

§ 1. 序

準安定状態を伴わない第二種相転移においては、転移温度 T_c 近傍で長波長ゆらぎが増大し、相関距離 $\xi \rightarrow \infty$ の結果、一般に比熱、帯磁率(圧縮率)などに発散が観測され、 T_c 近くの系の振舞いを記述する臨界指数、臨界振幅比、scaling 関数などは、系の詳細によらず(従って micro な量子効果も現れず)、系の空間次元 d 、order parameter の数 n 、相互作用 range(短距離、長距離、双極子 etc.)、系の対称性(等方、異方、etc.)、のみにより定まる。これが臨界現象における UNIVERSALITY の概念である。又、関数論的には T_c は free energy の二次導関数の特異点である。これらの諸量の研究には、厳密解の求まる場合が現状では極めて少数の model に限られているため、平均場近似や ϵ 、 $1/n$ 、高(低)温などの摂動展開が使われる。本研究では n -vector model を用い阿部により開始された¹⁾阿部・氷上の $1/n$ 展開理論²⁾を $O(1/n^2)$ に拡張した状態方程式³⁾を使って、臨界振幅比 R_x (Critical Amplitude Ratio) を三次元等方短距離系につき $O(1/n^2)$ まで計算し、他の理論や実験と比較した⁴⁾。その結果 $O(1/n)$ の計算では任意の spin 次元 n に対し $R_x < 1$ であったが、²⁾ ϵ 展開、⁵⁾級数展開⁵⁾及び EuO, Ni などの実験はいずれも $R_x > 1$ であり、⁵⁾ $1/n$ 展開でも $O(1/n^2)$ まで進めると数値が改善されることが分る。

§ 2. R_x の $O(1/n^2)$ までの一般的表式

状態方程式³⁾によると、本質的に温度の逆数である K は、逆帯磁率 r と磁化 M の関数 $K(r, M)$ である。 $T = T_c$ で $r = 0$ 、 $M = 0$ だから T_c からの温度のずれを

$$t = K_c - K = K(0, 0) - K(r, M) \quad (2.1)$$

とし

$$T > T_c \text{ では } r^{-1} = \Gamma t^{-r}, M = 0 \quad \text{より } K(0, 0) - K(r, 0) = (\Gamma r)^{1/r} \quad (2.2)$$

$$T < T_c \text{ では } r = 0, M = B(-t)^\beta \text{ より } K(0, M) - K(0, 0) = (M/B)^{1/\beta} \quad (2.3)$$

$$T = T_c \text{ では } t = 0, H = DM^\delta = rM \text{ より } K(0, 0) - K(r, M) = 0 \quad (2.4)$$

ここで β , r , δ は臨界指数、 B , Γ , D は臨界振幅、 H は外部磁場であり、(2.4)が T_c 。

奥 通敬

における r と M の関係を与える。又 R_χ は、次式で定義される。

$$R_\chi = \Gamma DB^{\delta-1} \quad (2.5)$$

(2.2) ~ (2.4) 及び scaling 則 $r = \beta(\delta - 1)$ により (2.5) は条件 (2.4) のもとに

$$R_\chi = [\bar{K}(r, M)/\bar{K}(0, M)]^r \quad (2.6)$$

となる。但し便宜上 $\bar{F}(r, M) = [F(r, M) - F(r, 0)]/M^2$, $\tilde{F}(r, M) = \bar{F}(r, M) - \bar{F}(0, M)$ の記法を用いる。

(2.6) に状態方程式の $O(1/n^2)$ までの結果³⁾

$$K(r, M) = \frac{1}{N} \sum_q g(q, r) + M^2 + \frac{1}{n} K_1(r, M) + \frac{1}{n^2} K_2(r, M) + O(1/n^3) \quad (2.7)$$

で代入し、(2.4) により M^2 を $O(1/n)$ まで展開した

$$M^2 = M_0^2 + \frac{1}{n} [K_1(0, 0) - K_1(r, M_0)] + O(1/n^2) \quad (2.8)$$

$$M_0^2 = M_0^2(r) = \frac{1}{N} \sum_q [g(q, 0) - g(q, r)] \quad (g(q, r) : \text{propagator}) \quad (2.9)$$

を用いて、 R_χ の最終的な表式が得られる。

$$\begin{aligned} R_\chi^{1/r} = \lim_{r \rightarrow 0} \{ & 1 + \frac{1}{n} \tilde{K}_1(r, M_0) + \frac{1}{n^2} [\tilde{K}_2(r, M_0) + \tilde{K}_1(r, M_0) \frac{K_1(r, M_0) - K_1(0, M_0)}{M_0^2}] \\ & - \frac{1}{n^2} \frac{K_1(r, M_0) - K_1(0, 0)}{M_0^2} \frac{\partial}{\partial M_0^2} [K_1(r, M_0) - K_1(0, M_0)] \} + O(1/n^3) \end{aligned} \quad (2.10)$$

§ 3. R_χ ($d=3$) の計算

三次元短距離系では (2.9) より $M_0^2 = \sqrt{r}/4$ であり、 \vec{q} を $\sqrt{r}\vec{q}$ と scale して (2.10) の K_1 が関係する部分を求めると

$$\begin{aligned} R_\chi^{1/r} = & 1 + \frac{1}{n} g_1 + \frac{1}{n^2} g_4 (g_1 - g_2 - g_3) + \frac{1}{n^2} (3g_1 - g_2 - g_3) L + \frac{1}{n^2} \lim_{r \rightarrow 0} \tilde{K}_2(r, M_0) \\ & + O(1/n^3) \end{aligned} \quad (3.1)$$

但し $g_1 \sim g_4$ は数値積分で $g_1 = -0.956$,²⁾ $g_2 = 0.190$, $g_3 = -0.862$, $g_4 = -0.634$ であ

り、 L は $L = \frac{1}{\pi^2} \lim_{r \rightarrow 0} \ln \frac{\pi A}{4\sqrt{r}}$ (A : upper-cutoff of momentum) の対数発散項を示す。

臨界振幅比 R_χ の $1/n$ 展開による $O(1/n^2)$ の計算

(3.1)に残った \tilde{K}_2 中の $K_a \sim K_{d2}$ の各項の発散を高々対数発散に押えるため β^6 や r^7 に類似の関数 $B(r, M_0)$ を加減した後、数値積分を実行すると、

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{K}_2(r, M_0) = [2.81 \pm 0.03] + (-3g_1 + g_2 + g_3)L \quad (3.2)$$

となる。(3.1), (3.2)より

$$R_\chi^{1/r} = 1 - \frac{0.956}{n} + \frac{2.99}{n^2} + O(1/n^3) \quad (3.3)$$

(3.3)の r として $1/n$ 展開の結果¹⁾を使うと、次の結果が導かれる。

$$R_{\chi_a} = [1 - \frac{0.956}{n} + \frac{2.99}{n^2} + O(1/n^3)]^{2-24/n\pi^2} \quad (3.4a)$$

$$\simeq R_{\chi_b} = \exp[-\frac{1.912}{n} + \frac{7.40}{n^2} + O(1/n^3)] \quad (3.4b)$$

$$\simeq R_{\chi_c} = 1 - \frac{1.912}{n} + \frac{9.22}{n^2} + O(1/n^3) \quad (3.4c)$$

§ 4. 結 論

Ref. 5)にならい、(3.4a)～(3.4c)の近似過程に由来する不確かさを考慮に入れ、 R_χ のより信頼できる値として、それらの平均値をとる。しかし、その場合でも $1/n$ と $1/n^2$ の係数がcomparableなため、及び $1/n$ 展開の r の値が $n=1, 2$ では1以下になるため¹⁾ $n=1, 2$ の結果は満足すべきものではない。だが $n=3$ 程度だと、信頼度も増し、他の方法と比較し得る結果が得られる。下に結果をまとめておく。

n	R_{χ_a}	R_{χ_b}	R_{χ_c}	R_χ (average)	R_{χ_s}		$R_\chi (n=3)$
3	1.02	1.20	1.39	1.20 ± 0.15	1.02	$1/n$	1.20 ± 0.15
4	0.91	0.98	1.10	1.00 ± 0.08	—	ϵ	1.33 ± 0.01
10	0.89	0.89	0.90	0.89 ± 0.005	—	series	1.23
2	—	—	2.35	—	1.37	EuO, Ni	1.6 (1.4～1.7)

R_{χ_s} は(3.3)の r として級数展開の値 $r=1.38$ ($n=3$), 1.32 ($n=2$)を用いたもの。

EuO, Niは、かなり理想的な三次元 Heisenberg modelであるが、双極子相互作用も入っているため、実験材料としてはHeusler合金の方が適当であると考えられる⁸⁾

参 考 文 献

- 1) R. Abe, Prog. Theor. Phys. **49** (1973), 113.
- 2) R. Abe and S. Hikami, Prog. Theor. Phys. **57** (1977), 1197.
- 3) Y. Okabe, M. Oku and R. Abe, Prog. Theor. Phys. **59** (1978), 1825.
- 4) M. Oku and Y. Okabe, Prog. Theor. Phys. **61** (1979), No. 2.
- 5) A. Aharony and P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **B13** (1976), 3081.
- 6) Y. Okabe and M. Oku, Prog. Theor. Phys. **60** (1978), 1277.
- 7) Y. Okabe and M. Oku, Prog. Theor. Phys. **60** (1978), 1287.
- 8) R. M. Suter and C. Hohenemser, Phys. Rev. Letters **41** (1978), 705.

不純物効果の $1/n$ 展開

出 浦 一 夫

近年、臨界現象に於ける不純物効果の問題が、注目されるようになった。ここでは、不純物効果の問題として、Weakly Random spin system の $1/n$ 展開について述べる。

取り扱うモデルは、ハミルトニアンが、 $-\beta \mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{ij} K_{ij} (1 - aP_i) (1 - aP_j) \sigma_i(m) \sigma_j(m) + h \sum_i (1 - aP_i) \sigma_i(m)$ で与えられる古典的 n -vector model とし、その quenched case を考える。(P_i : random parameter, $\overline{P_i} = P$, a : small parameter) このハミルトニアンにより、通常 $1/n$ 展開の方法を実行する。ここで、 $n \rightarrow \infty$, $O(a^2)$ までの状態方程式はすでに求められていて、¹⁾²⁾ その結果、ランダムネスは、臨界指数に寄与しないことがわかっている。そこで、 $n \rightarrow \infty$, $O(a^3)$, $O(1/n, a^2)$ までの指数を計算してみた。結果は、 $n \rightarrow \infty$, $O(a^2)$ の場合と同様に臨界指数へのランダムネスの寄与はない。まず、 $n \rightarrow \infty$, $O(a^3)$ あるいは、 $O(1/n, a^2)$ までの状態方程式および相関関数を求める。
 $n \rightarrow \infty$, $O(a^3)$ では、

状態方程式

$$K = (\text{pure な時の項}) - K^2 a_2 \frac{1}{N} \sum \frac{J_M(q)}{\nu_M^2(q)} - K^3 a_3 \{K_1 + K_2\}$$